Гомологии петель момент-угол комплексов и квазиторических многообразий

Федор Вылегжанин

МГУ имени М. В. Ломоносова / НИУ ВШЭ

Третья конференция математических центров России
10 октября 2023 г., АГУ, Майкоп

План

- Гомологии петель
- Квазиторические многообразия и момент-угол комплексы
- Подход Панова–Рэя к их гомологиям петель
- Комбинаторно-алгебраическая техника
- Результаты

Гомологии петель

$$\begin{array}{ccl} X & - & \text{(односвязное) топологическое пространство} \rightsquigarrow \\ \Omega X & - & \text{ассоциативное H-пространство} \rightsquigarrow \\ H_*(\Omega X;\Bbbk) & - & \text{кокоммутативная } \Bbbk\text{-алгебра Хопфа.} \end{array}$$

- Задача: задать $H_*(\Omega X;\Bbbk)$, как градуированную $\Bbbk$-алгебру, образующими и соотношениями.

Скобка Уайтхеда $\pi_k(X) \times \pi_\ell(X) \to \pi_{k+\ell-1}(X)$ задаёт структуру градуированного кольца Ли на $L = \bigoplus_{n\geq 1} \pi_{n+1}(X)$.

Теорема Милнора–Мура

$H_*(\Omega X;\mathbb{Q}) \cong \mathrm{U}(L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ как $\mathbb{Q}$-алгебры Хопфа.

Как вычислить алгебру $H_*(\Omega X;\Bbbk)$?
Теорема Адамса: $H_*(\Omega X;\Bbbk) \cong \mathit{Cotor}_C(\Bbbk,\Bbbk)$ для dg-коалгебры $C \sim C_*(X;\Bbbk)$.
Следствие: если X формально, то $H_*(\Omega X;\Bbbk) \cong \mathrm{Ext}_{H^*(X;\Bbbk)}(\Bbbk,\Bbbk)$.

Квазиторические многообразия

Стандартное действие тора: $T^n \curvearrowright \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$; имеем $\mathbb{R}^{2n}/T^n = \mathbb{R}^n_{\geq 0}$.
Значит: если действие $T^n \curvearrowright M^{2n}$ локально стандартно, то пространство орбит M/T – многообразие с углами.

Определение (Davis,Januszkiewicz'91)

Многообразие M^{2n} с локально стандартным действием T^n – квазиторическое, если $M/T \cong P$ – простой выпуклый n-мерный многогранник.

Примеры:

- $T^n \curvearrowright \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ – квазиторическое, так как $\mathbb{C}\mathrm{P}^n/T^n = \Delta^n$;
- Все гладкие проективные торические многообразия$/\mathbb{C}$;
- $\mathbb{C}\mathrm{P}^2 \# \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ – не торическое, но квазиторическое; $P = [0,1]^2$.

Момент-угол комплексы

Пусть $\mathcal{K}$ – абстрактный симплициальный комплекс на множестве вершин $[m] = \{1, \ldots, m\}$. Ему соответствует момент-угол комплекс:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} := \bigcup_{J \in \mathcal{K}} (D^2, S^1)^J, \quad \text{где} \quad (D^2, S^1)^J := \prod_{j \in J} D^2 \times \prod_{j \in [m] \setminus J} S^1 \subset (D^2)^m.$$

Действие $\mathbb{T}^m \curvearrowright (D^2)^m$ ограничивается до $\mathbb{T}^m \curvearrowright \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$.

Предложение (Бухштабер, Панов'99)

Если $|\mathcal{K}| \cong S^{n-1}$, то $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ – $(m+n)$-мерное топологическое многообразие.

Если триангуляция сферы происходит из многогранника (или хотя бы полного веера) в $\mathbb{R}^n$, то эти данные задают гладкую структуру на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$. Более того, тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ (или $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \times S^1$) допускает $\mathbb{T}^m$-инвариантную некэлерову комплексную структуру... (Панов, Устиновский'10)

Классификация квазиторических многобразий

Рассмотрим следующие комбинаторные данные $(\mathcal{K}, \lambda)$:

- $\mathcal{K}$ – "многогранная" триангуляция $(n-1)$-мерной сферы (т.е. $\mathcal{K} \cong \partial(P^*)$ для некоторого простого n-мерного многогранника P);
- $\lambda : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$ – такое отображение решёток, что набор $\{\lambda(e_j),\ j \in J\}$ – базис в $\mathbb{Z}^n$ для любого $(n-1)$-мерного симплекса $J \in \mathcal{K}$.

Теорема (Дэвис–Янушкевич + Бухштабер–Панов)

При этих условиях:

1. $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ наделяется структурой гладкого многообразия;
2. $\mathrm{Ker}(\exp \lambda : \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^n) \subset \mathbb{T}^m$ – это $(m-n)$-мерный тор, свободно действующий на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$;
3. $M(\mathcal{K}, \lambda) = \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} / T^{m-n}$ – квазиторическое многообразие над P;
4. Любое квазиторическое многообразие эквивариантно гомеоморфно некоторому $M(\mathcal{K}, \lambda)$.

Пространство Дэвиса–Янушкевича

Конструкция Бореля: если $G \curvearrowright X$ – действие топологической группы, то $G \curvearrowright EG \times X$ – свободное действие (причём $EG \times X \sim X$). Получаем гомотопическое расслоение

$$G \to X \to X//G, \quad X//G := (EG \times X)/G.$$

$\mathrm{DJ}_{\mathcal{K}} := \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}//\mathbb{T}^m = M//T^n$ – пространство Дэвиса–Янушкевича.

Теорема (Бухштабер, Панов'99)

$\mathrm{DJ}_{\mathcal{K}} \simeq \bigcup_{J\in\mathcal{K}}(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^J \subset (\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^m$.

Следовательно, $H^*(\mathrm{DJ}_{\mathcal{K}};\Bbbk) \cong \Bbbk[\mathcal{K}]$, где

$$\Bbbk[\mathcal{K}] := \Bbbk[v_1,\dots,v_m]/(\prod_{j\in J} v_j = 0,\ \forall J \notin \mathcal{K}), \quad \deg v_i = 2$$

– кольцо Стэнли–Райснера.

Расщепимые расслоения

$\mathrm{DJ}_\mathcal{K} = \mathcal{Z}_\mathcal{K}/\!/\mathbb{T}^m = M/\!/T^n$, поэтому имеем гомотопические расслоения

$$\mathbb{T}^m \to \mathcal{Z}_\mathcal{K} \to \mathrm{DJ}_\mathcal{K}, \quad T^n \to M \to \mathrm{DJ}_\mathcal{K},$$

$$\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K} \to \Omega\mathrm{DJ}_\mathcal{K} \xrightarrow{p} \mathbb{T}^m, \quad \Omega M \to \Omega\mathrm{DJ}_\mathcal{K} \xrightarrow{p'} T^n.$$

Наблюдение (Панов, Рэй'08)

У отображений p и p' есть гомотопические сечения
($s : \mathbb{T}^m \to \Omega\mathrm{DJ}_\mathcal{K}$, $p \circ s \sim 1$). (Аналогия с $\Omega(X \vee Y) \to \Omega(X \times Y)$.)

Теорема (Панов, Рэй)

$H_*(\Omega\mathrm{DJ}_\mathcal{K}; \mathbb{k}) \cong \mathrm{Ext}^*_{\mathbb{k}[\mathcal{K}]}(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ как градуированные $\mathbb{k}$-алгебры:
$H_n(\Omega\mathrm{DJ}_\mathcal{K}; \mathbb{k}) \cong \bigoplus_{n=-i+2j} \mathrm{Ext}^i_{\mathbb{k}[\mathcal{K}]}(\mathbb{k}, \mathbb{k})_{2j}$.

Гомологии петель как подалгебры

Итог: расширения алгебр Хопфа

$$1 \to H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}; \Bbbk) \to \mathrm{E}(\Bbbk[\mathcal{K}]) \to \Lambda[u_1, \ldots, u_m] \to 0,$$

$$1 \to H_*(\Omega M; \Bbbk) \to \mathrm{E}(\Bbbk[\mathcal{K}]) \to \Lambda[\theta_1, \ldots, \theta_n] \to 0.$$

В частности: $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}; \Bbbk) \subset \mathrm{E}(\Bbbk[\mathcal{K}])$, и

$$\mathrm{E}(\Bbbk[\mathcal{K}]) \simeq H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}; \Bbbk) \otimes \Lambda[u_1, \ldots, u_m]$$

как левые $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}; \Bbbk)$-модули (но не как алгебры!) Аналогично,

$$\mathrm{E}(\Bbbk[\mathcal{K}]) \simeq H_*(\Omega M; \Bbbk) \otimes \Lambda[\theta_1, \ldots, \theta_n].$$

Получаем две подзадачи:

1. Задать алгебру $\mathrm{E}(\Bbbk[\mathcal{K}]) = \mathrm{Ext}^*_{\Bbbk[\mathcal{K}]}(\Bbbk, \Bbbk)$ образующими и соотношениями;
2. Зная $\mathrm{E}(\Bbbk[\mathcal{K}])$, описать её подалгебры $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}; \Bbbk)$ и $H_*(\Omega M; \Bbbk)$.

Известные элементы и тождества в $\mathrm{E}(\Bbbk[\mathcal{K}])$

- В список образующих входят элементы $u_1, \ldots, u_m \in \mathrm{Ext}^1_{\Bbbk[\mathcal{K}]}(\Bbbk, \Bbbk)_2$. Они порождают подалгебру, изоморфную
$$T(u_1, \ldots, u_m)/(u_1^2 = \cdots = u_m^2 = 0;\ [u_i, u_j] = 0,\ \{i, j\} \in \mathcal{K}).$$
Других образующих в Ext^1 нет.
- Каждой недостающей грани $J \subset [m]$, $|J| \geq 3$, соответствует образующая $w_J \in \mathrm{Ext}^2_{\Bbbk[\mathcal{K}]}(\Bbbk, \Bbbk)_{2|J|}$. Других образующих в Ext^2 нет.
- Имеем тождества
$$[u_i, w_J] = 0,\ i \in J;$$
$$\sum_{i \in Q:\ Q \setminus i \notin \mathcal{K}} [u_i, w_{Q \setminus i}] = 0, \quad \partial^2 \Delta_Q \subset \mathcal{K}.$$

Неопубликованный результат Добринской: если $\mathcal{K}$ принадлежит классу dual-SCM, то других образующих и соотношений нет.
Результаты Абрамяна и Панова: примеры образующих в Ext^i, $i >> 1$, связанных с высшими произведениями Уайтхеда.

Алгебра $\mathrm{E}(\Bbbk[\mathcal{K}])$ в известных случаях

Комплекс $\mathcal{K}$ флаговый, если верно: любой набор вершин, попарно соединённых рёбрами, является симплексом.

Флаговый случай (Фрёберг'75)

Если $\mathcal{K}$ флаговый, то $\Bbbk[\mathcal{K}]$ кошулева. Следовательно,

$$\mathrm{E}(\Bbbk[\mathcal{K}]) = T(u_1,\dots,u_m)/(u_i^2=0;\ [u_i,u_j]=0,\ \{i,j\}\in\mathcal{K}).$$

"Почти флаговый" случай (В.)

Пусть $\mathcal{K}$ получается из флагового комплекса удалением максимальных граней $I_1,\dots,I_r$, причём $|I_j|\geq 3$ для всех j. Тогда

$$\mathrm{E}(\Bbbk[\mathcal{K}]) = \frac{T(u_1,\dots,u_m,w_{I_1},\dots,w_{I_r})}{(u_i^2=0;\ [u_i,u_j]=0,\ \{i,j\}\in\mathcal{K};\ [u_i,w_{I_j}]=0,\ i\in I_j)}.$$

Ключевая лемма: разложение $\mathrm{E}(\Bbbk[\mathcal{K}])\cong\operatorname{colim}\mathrm{E}(\Bbbk[\mathcal{K}_P])$ в копредел по всем смежностным полным подкомплексам.

Образующие и соотношения связных $\Bbbk$-алгебр

Предложение (Уолл'60)

Пусть $S = T(a_1, \ldots, a_N)/(r_1 = \cdots = r_M = 0)$ – связная градуированная алгебра над полем $\Bbbk$, причём все элементы a_i, r_j однородные, а наборы $\{a_i\}$ и $\{r_j\}$ минимальны по включению. Тогда

$$\bigoplus_{i=1}^{N} \Bbbk \cdot a_i \simeq \mathrm{Tor}_1^S(\Bbbk, \Bbbk), \quad \bigoplus_{j=1}^{M} \Bbbk \cdot r_j \simeq \mathrm{Tor}_2^S(\Bbbk, \Bbbk).$$

Значит: если посчитать $\mathrm{Tor}^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\Bbbk)}(\Bbbk, \Bbbk)$ и $\mathrm{Tor}^{H_*(\Omega M;\Bbbk)}(\Bbbk, \Bbbk)$, то мы узнаем количество и степени образующих и соотношений в минимальных копредставлениях этих алгебр.

Более того, по представителям базисных элементов в Tor_1 и Tor_2 в бар-конструкции можно восстановить образующие и соотношения...

Образующие и соотношения подалгебры

Пусть $S \subset A$ – подалгебра в хорошо известной алгебре, причём $A \simeq S \otimes V$ как левые S-модули. Тогда $\mathrm{Tor}^S(\Bbbk, \Bbbk)$ можно посчитать по следующей схеме.

1. Построить "экономную" резольвенту
$$\cdots \to A \otimes M_2 \to A \otimes M_1 \to A \otimes M_0 \to \Bbbk \to 0$$
левого A-модуля $\Bbbk$.
2. Рассмотреть её как свободную резольвенту
$$\cdots \to S \otimes (V \otimes M_2) \to S \otimes (V \otimes M_1) \to S \otimes (V \otimes M_0) \to \Bbbk \to 0$$
левого S-модуля $\Bbbk$.
3. Применить $\Bbbk \otimes_S (-)$ и посчитать гомологии:
$$\mathrm{Tor}_j^S(\Bbbk, \Bbbk) = H_j\Big[V \otimes M_\bullet\Big].$$

Результаты: количество образующих и соотношений

Теорема (В.'22)

Пусть $\mathcal{K}$ флаговый. Тогда

$$\mathrm{Tor}_i^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\Bbbk)}(\Bbbk,\Bbbk)_t \cong \bigoplus_{J\subset[m]:\ |J|=t} \widetilde{H}_{i-1}(\mathcal{K}_J;\Bbbk).$$

Следовательно, алгебра $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\Bbbk)$ минимально задаётся $\sum_{J\subset[m]}\dim\widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J;\Bbbk)$ образующими и $\sum_{J\subset[m]}\dim\widetilde{H}_1(\mathcal{K}_J;\Bbbk)$ соотношениями степеней $|J|$.

Теорема (В.)

Пусть M – квазиторическое многообразие над P, комплекс $\mathcal{K}=\partial(P^*)$ флаговый. Тогда алгебра $H_*(\Omega M;\Bbbk)$ задаётся $h_1(P)=m-n$ образующими степени 1 и $h_2(P)$ соотношениями степени 2.

Здесь $h_2(P)=n(n-1)/2-m(n-1)+e$, где e – число рёбер в $\mathcal{K}$.

Результаты: явное описание образующих

Пусть $j \in J$, $J \setminus \{j\} = \{i_1 < \cdots < i_k\}$. Обозначим

$$c(J,j) := [u_{i_1}, [u_{i_2}, \dots [u_{i_k}, u_j] \dots]] \in \mathrm{E}(\Bbbk[\mathcal{K}]).$$

Теорема (Грбич–Панов–Терио–Ву'16)

Пусть $\mathcal{K}$ флаговый. Тогда алгебра $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\Bbbk)$ порождается следующим набором из $\sum_{J\subset[m]} \dim \widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J;\Bbbk)$ образующих:

$$\{c(J,j) : J \subset [m], j \in \Theta(J)\},$$

где $\Theta(J)$ – подмножество в J, содержащее по одной вершине из каждой компоненты связности комплекса $\mathcal{K}_J$, не содержащей $\max(J)$.

Остальные элементы вида $c(J,j)$ выражаются через образующие с помощью рекурсивного алгоритма.

Результаты: явное описание соотношений

Теорема (В.)

Каждому простому циклу $(i_1, \ldots, i_s, i_{s+1} = i_s)$ в $\mathcal{K}_J$ соответствует следующее соотношение в $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \Bbbk)$:

$$\sum_{t=1}^{s} \sum_{\substack{J=P\sqcup Q: \\ i_t\in P,\ i_{t+1}\in Q, \\ \max(P)>i_t,\ \max(Q)>i_{t+1}}} \pm\Big[c(P, i_t), c(Q, i_{t+1})\Big] = 0.$$

Теорема (В.)

Пусть $\mathcal{K}$ получается из флагового комплекса $\mathcal{K}^f$ удалением максимальных граней $I_1, \ldots, I_r$, причём $|I_j| \geq 3$ для всех j. Тогда $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \Bbbk)$ – это свободное произведение алгебры $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}^f}; \Bbbk)$ и тензорной алгебры на $\sum_{j=1}^{r} 2^{m-|I_j|}$ образующих

$$[u_{\ell_1}, [u_{\ell_2}, \ldots, [u_{\ell_p}, w_{I_j}] \ldots]], \quad L = \{\ell_1 < \cdots < \ell_p\} \subset [m] \setminus I_j.$$

Квазиторические многообразия, флаговый случай

Теорема (В.)

Пусть $M = M(\mathcal{K}, \lambda)$ квазиторическое, $\mathcal{K}$ флаговый. Тогда

- Алгебра $H_*(\Omega M; \Bbbk)$ задаётся $h_1(P) = m - n$ образующими степени 1 и $h_2(P)$ соотношениями степени 2.
- Образующие имеют вид $\sum_{i=1}^{m} \mu_{it} u_i \in \mathrm{E}(\Bbbk[\mathcal{K}])$, где $\vec{\mu}_1, \ldots, \vec{\mu}_{m-n} \in \Bbbk^m$ – базис в векторном пространстве $\mathrm{Ker}(\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \Bbbk : \Bbbk^m \to \Bbbk^n)$.
- Более точно, $H_*(\Omega M; \Bbbk)$ квадратично двойственна к алгебре

$$H^*(M; \Bbbk) \cong \Bbbk[\mathcal{K}]/(\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} v_i = 0,\ j = 1, \ldots, n),$$

где (λ_{ij}) – матрица отображения $\lambda : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$.

В частности, для флаговых $\mathcal{K}$ алгебра $H^*(M; \Bbbk)$ кошулева!

Список литературы

- Ф.Е. Вылегжанин. Алгебры Понтрягина и LS-категория момент–угол-комплексов во флаговом случае (2022).
  Труды МИАН, 317 (2022), 64-88.
- J. Grbić, T. Panov, S. Theriault and J. Wu. The homotopy types of moment-angle complexes for flag complexes.
  Trans. of the Amer. Math. Soc. 368 (2016), no.9, 6663-6682.
- V.M. Buchstaber and T.E. Panov. *Toric topology*, volume 204 of *Mathematical Surveys and Monographs*.
  American Mathematical Society, Providence, RI (2015).
- T. Panov and N. Ray. Categorical aspects of toric topology.
  In: Toric Topology, M. Harada et al., eds. Contemp. Math., vol. 460.
  Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 293–322.
- C.T.C. Wall. Generators and relations for the Steenrod algebra.
  Ann. Math., Ser. 2, 72 (3), 429-444 (1960).