ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 23 МАТЕМАТИКИ Выпуск 1
2016

Д. А. Борзых (Москва, Национальный исследовательский университет, Высшая школа экономики). **Формула Тейлора для операторов и метод интегрирования по частям.**

В работе приводится альтернативное доказательство известной формулы Тейлора для операторов, действующих в нормированных пространствах. В качестве способа доказательства используется метод интегрирования по частям. Этот способ ранее применялся при выводе формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме для функции одной переменной. В данной работе показано, что этим же способом можно получить формулу Тейлора и для случая операторов.

Формула Тейлора

Лемма. *Если оператор* $F\colon X \to Y$ *является* n *раз дифференцируемым по Фреше в точке* $\widehat{x} + \widehat{t}\widehat{h}$ $(\widehat{x}, \widehat{h} \in X,\ \widehat{t} \in \mathbb{R})$, *то*

$$\frac{d^n}{dt^n} F(\widehat{x} + t\widehat{h})\big|_{t=\widehat{t}} = F^{(n)}(\widehat{x} + \widehat{t}\widehat{h})[\underbrace{\widehat{h}, \dots, \widehat{h}}_{n}]. \tag{1}$$

Теорема (формула Тейлора). *Пусть* X, Y *— банаховы пространства и производная* $F^{(n+1)}(\cdot)$ *оператора* $F\colon X \to Y$ *непрерывна в некоторой выпуклой окрестности* U *точки* $\widehat{x} \in X$, $n \geq 0$. *Тогда для любого элемента* h, *такого, что* $\widehat{x} + h \in U$, *имеет место формула Тейлора*:

$$F(\widehat{x} + h) - F(\widehat{x}) = F'(\widehat{x})[h] + \frac{1}{2!} F''(\widehat{x})[h, h] + \dots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(\widehat{x})[\underbrace{h, \dots, h}_{n}] + \omega(\widehat{x}, h), \tag{2}$$

где остаточный член

$$\omega(\widehat{x}, h) := \int_0^1 F^{(n+1)}(\widehat{x} + th)[\underbrace{h, \dots, h}_{n+1}] \cdot \frac{(1-t)^n}{n!}\, dt$$

и при этом $\|\omega(\widehat{x}, h)\| = o(\|h\|^n)$, $h \to 0$.

Доказательство. Докажем соотношение (2). Используя формулу Ньютона–Лейбница, формулу интегрирования по частям, а также равенство (1), получаем

$$F(\widehat{x} + h) - F(\widehat{x}) = F(\widehat{x} + th)\big|_{t=0}^{t=1} = \int_0^1 F'(\widehat{x} + th)[h]\, dt = \int_0^1 F'(\widehat{x} + th)[h] \cdot \frac{d}{dt}(t-1)\, dt$$

$$= F'(\widehat{x} + th)[h] \cdot (t-1)\big|_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \frac{d}{dt}\big(F'(\widehat{x} + th)[h]\big) \cdot (t-1)\, dt$$

$$= F'(\widehat{x})[h] - \int_0^1 F''(\widehat{x} + th)[h, h] \cdot (t-1)\, dt$$

$$= F'(\widehat{x})[h] - \int_0^1 F''(\widehat{x} + th)[h, h] \cdot \frac{d}{dt} \frac{(t-1)^2}{2}\, dt$$

$$= F'(\widehat{x})[h] - F''(\widehat{x}+th)[h,h]\cdot\frac{(t-1)^2}{2}\Big|_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 \frac{d}{dt}\big(F''(\widehat{x}+th)[h,h]\big)\cdot\frac{(t-1)^2}{2}\,dt$$

$$= F'(\widehat{x})[h] + \frac{1}{2}F''(\widehat{x})[h,h] + \int_0^1 F'''(\widehat{x}+th)[h,h,h]\cdot\frac{(t-1)^2}{2}\,dt$$

$$= \ldots = F'(\widehat{x})[h] + \frac{1}{2!}F''(\widehat{x})[h,h] + \ldots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(\widehat{x})[\underbrace{h,\ldots,h}_{n}]$$

$$\underbrace{+(-1)^n\int_0^1 F^{(n+1)}(\widehat{x}+th)[\underbrace{h,\ldots,h}_{n+1}]\cdot\frac{(t-1)^n}{n!}\,dt}_{=\omega(\widehat{x},h)}$$

Оценка остаточного члена получается следующим образом:

$$\|\omega(\widehat{x},h)\| = \Big\|\int_0^1 F^{(n+1)}(\widehat{x}+th)[\underbrace{h,\ldots,h}_{n+1}]\cdot\frac{(1-t)^n}{n!}\,dt\Big\|$$

$$\leqslant \int_0^1 \|F^{(n+1)}(\widehat{x}+th)[\underbrace{h,\ldots,h}_{n+1}]\|\cdot\frac{(1-t)^n}{n!}\,dt$$

$$\leqslant \int_0^1 \|F^{(n+1)}(\widehat{x}+th)\|\,\|h\|^{n+1}\cdot\frac{(1-t)^n}{n!}\,dt$$

$$\leqslant -C\|h\|^{n+1}\cdot\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{C}{(n+1)!}\|h\|^{n+1},$$

где $C := \max_{t\in[0;1]}\|F^{(n+1)}(\widehat{x}+th)\|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. Изд. 3-е. М.: Физматлит, 2002.
2. *Колмогоров А. Н.*, *Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 7-е. М.: Физматлит, 2004.
3. *Алексеев В. М.*, *Тихомиров В. М.*, *Фомин С. В.* Оптимальное управление. Изд. 3-е. М.: Физматлит, 2007.